

L2 MTH1314 2016-2017

Devoir Maison n° 2 A rendre pour le mardi 22 Novembre

Le barème est donné à titre indicatif. La rédaction doit être personnelle et soignée.

Exercice 1. (10 points) Considérons \mathbb{R}^2 muni des deux lois $+$ et $*$ définies respectivement par

$$\begin{aligned}\forall (x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4, \quad (x, y) + (a, b) &= (x + a, y + b), \\ \forall (x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4, \quad (x, y) * (a, b) &= (xa, xb + ya).\end{aligned}$$

1. (2 points) Vérifier que $(\mathbb{R}^2, +, *)$ est un anneau commutatif. On notera $\tilde{0}$ et $\tilde{1}$ les éléments neutres pour $+$ et $*$ respectivement.
2. (2 points) Pour $X \in \mathbb{R}^2$, on pose $X^2 := X * X$. Résoudre les équations suivantes :
 - (a) $X^2 = X$,
 - (b) $X^2 = \tilde{0}$,
 - (c) $X^2 = \tilde{1}$.
3. (1 point) Déterminer les éléments inversibles de $(\mathbb{R}^2, +, *)$.
4. (5 points) On note $X^0 = \tilde{1}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $X^n = X * \dots * X$, n fois.
 - (a) Si $X = (x, 0)$ avec $x \in \mathbb{R}$, déterminer X^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) Même question si $X = (0, y)$, avec $y \in \mathbb{R}$.
 - (c) En déduire X^n pour tout $X \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (d) Redémontrer le résultat de la question précédente directement.

Exercice 2. (10 points)

1. (1 point) Montrer que l'application $\varphi : (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times$ est bien définie.

$$x \longmapsto x^3.$$
2. (1 point) Montrer que φ est un morphisme de groupes.
3. (3 points) Dans cette question, on cherche à déterminer le noyau de φ . Soit $x \in \text{Ker}(\varphi)$.
 - (a) Montrer que $x = 1$ ou que $x^2 + x + 1 = 0$.
 - (b) Factoriser $x^2 + x + 1$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. *Indication* : $x^2 + x + 1 = x^2 - 12x + 1$.
 - (c) En déduire le noyau de φ .
4. (1 point) Vérifier que la relation \sim définie par $a \sim b \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$ est une relation d'équivalence.
5. (2 points) Montrer que a et b font partie de la même classe d'équivalence si et seulement si $b \in \{a, 3a, 9a\}$ et calculer les quatre classes d'équivalence.
6. (2 points) Déterminer $\text{Im}(\varphi)$.
7. (Bonus ! 3 points) Soient $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$.
 - (a) Montrer que si $y \neq 0 \pmod{13}$, alors $2 \in \text{Im}(\varphi)$ et en déduire que 13 divise x et y .
 - (b) Montrer alors que 13 divise aussi z .
 - (c) Conclure que la seule solution entière de $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$ est le triplet $(0, 0, 0)$.