

## L2 MTH1314 2016-2017

### Devoir Maison n° 1 A rendre pour le lundi 17 Octobre

**Exercice 1.** Soient  $F$  l'ensemble des femmes,  $H$  celui des hommes et  $M(x, y)$  la proposition «  $x$  est marié(e) avec  $y$  ». Enoncer par des phrases sans ambiguïté les propositions suivantes.

- A.  $\exists x \in F, \forall y \in H, M(x, y).$
- B.  $\forall y \in H, \exists x \in F, M(x, y).$

Ces deux propositions sont-elles équivalentes ? Nier avec des symboles logiques ainsi qu'en français ces propositions.

**Exercice 2.** On pose  $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  et on considère  $*$  la loi définie par

$$\forall ((x, y), (a, b)) \in G \times G, \quad (x, y) * (a, b) = \left( xa, xb + \frac{y}{a} \right).$$

1. Vérifier que  $*$  est une loi de composition interne sur  $G$  et montrer que  $(G, *)$  est un groupe non commutatif.
2. Résoudre dans  $G$  l'équation suivante :  $(3, 4) * (x, y) = (3, 6)$ .
3. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-groupes de  $G$  ?

$$\begin{aligned} H_1 &= ]0; +\infty[^2, & H_2 &= ]0; +\infty[ \times [0; +\infty[, & H_3 &= ]0; +\infty[ \times \mathbb{R}, \\ H_4 &= \{-1, 1\} \times \mathbb{R}, & H_5 &= \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

4. Montrer que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'ensemble

$$H_\alpha = \left\{ \left( x, \alpha \left( x - \frac{1}{x} \right) \right), x \in \mathbb{R}^* \right\},$$

est un sous-groupe de  $G$ .

**Exercice 3.** Soit  $(G, \cdot)$  un groupe fini de cardinal  $n \geq 2$ . On note  $G = \{x_1, \dots, x_n\}$  et on suppose la loi  $\cdot$  commutative sur  $G$ . On fixe  $a \in G$  et on définit  $\gamma_a$  sur  $G$  par

$$\begin{aligned} \gamma_a : \quad G &\rightarrow G \\ x &\mapsto a \cdot x. \end{aligned}$$

On note encore pour tous  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $y_i = \gamma_a(x_i)$  les images des  $x_i$  par  $\gamma_a$ .

1. Montrer que  $\{y_1, \dots, y_n\} = G$ .
2. En déduire que

$$\prod_{i=1}^n x_i = \prod_{i=1}^n (a \cdot x_i).$$

3. Conclure que  $a^n = e$ , où  $e$  désigne l'élément neutre du groupe.