L3 MTH1610
Université Bretagne Sud
2015-2016

Feuille de TD n°5
Espaces de Hilbert et Séries de Fourier dans L^2

Espaces de Hilbert

Exercice 1. Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert. A l'aide du théorème de projection sur un sous-espace fermé, montrer que si $x, y \in E$ vérifient $\langle x, y \rangle = \|x\| \, \|y\|$ alors x et y sont colinéaires. Connaissez-vous une autre démonstration valide dans un espace préhilbertien ?

Exercice 2. Soient $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien et F et F' deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si F' est orthogonal et supplémentaire à F, $E = F \overset{\perp}{\oplus} F'$, alors $F' = F^{\perp}$.

Exercice 3. Soient $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien et A une partie de E. Montrer que $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.

Exercice 4. Soient $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de E tel que $F \neq E$. Montrer que qu'il existe un vecteur orthogonal à F : $F^{\perp} \neq \{0\}$.

Exercice 5. Soient $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose G fermé.

1. Montrer que $\overline{F} \subset F^{\perp\perp}$.
2. Montrer que $G^{\perp\perp} \subset G$.
3. Montrer que $\overline{F}^{\perp} = F^{\perp}$.
4. En déduire des questions précédentes que $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

Exercice 6. Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien et f un endomorphisme de E. On dit que f admet un adjoint s'il existe un endomorphisme $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle .$$

1. Montrer que si un adjoint g existe alors il est unique.
2. On suppose E complet et f continue. On note $\|.\|_{\star}$ sa norme subordonnée :

$$\|f\|_{\star} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

   (a) Montrer à l'aide du théorème de Riesz que f admet un adjoint g.
   (b) Montrer que g est continu et que $\|g\|_{\star} = \|f\|_{\star}$.

Exercice 7. Soit $l^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites complexes de carré sommable :

$$l^2(\mathbb{N}) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \ \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^2 < +\infty \right\}.$$

1. Montrer que pour tout $(x, y) = \left((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \right) \in l^2(\mathbb{N}) \times l^2(\mathbb{N})$, on a

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \overline{y_k} < +\infty.$$

2. Vérifier que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur $l^2(\mathbb{N})$. On notera $\|.\|_2$ la norme associée.
3. Soit $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $l^2(\mathbb{N})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que $\left(x_k^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente. On notera x_k sa limite.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $q \geqslant n_0$ et tout $N \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{N} \left|x_k - x_k^{(q)}\right|^2 \leqslant \varepsilon.$$
5. En déduire que $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un élément de $l^2(\mathbb{N})$ et que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\left\|x - x^{(n)}\right\|_2 \leqslant \varepsilon$.
6. Conclure que $(l^2(\mathbb{N}), \langle .,. \rangle)$ est un espace de Hilbert.

Exercice 8. On considère l'ensemble des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$: $E = \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$ munit du produit scalaire : $\forall f,g \in E$, $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E^{\mathbb{N}^*}$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nt & \text{si } t \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } t \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$
On définit également ϕ (qui n'est pas dans E) par
$$\phi(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in [-1, 0[\\ 1 & \text{si } t \in [0, 1]. \end{cases}$$
1. Montrer que $\|f_n - \phi\|_{\mathrm{L}^2([-1,1])} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et en déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy de $(E, \|.\|_{\mathrm{L}^2})$.
2. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $(E, \|.\|_{\mathrm{L}^2})$. Notons $f \in E$ sa limite. Justifier qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [-\eta, \eta]$, $|f(t) - f(0)| \leqslant \frac{1}{2}$.
3. En déduire que l'inégalité $|f(t) - \phi(t)| \geqslant \frac{1}{2}$ est vraie $\forall t \in [-\eta, 0[$ ou alors $\forall t \in [0, \eta]$.
4. En déduire une contradiction et conclure que $(E, \|.\|_{\mathrm{L}^2})$ est un espace préhilbertien qui n'est pas complet.

Séries de Fourier dans L^2

Exercice 9. A l'aide de l'exercice 2 du TD 4, montrer les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$.
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
6. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$.

Exercice 10. Soit $f \in \mathrm{L}^2([0, 2\pi])$. Montrer que
$$c_n\left(f^2\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\, c_{n-k}(f).$$

Exercice 11. Soit f une fonction 2π-périodique et localement intégrable telle que,
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_{2n+1}(f) = 0.$$
Montrer que f est π-périodique.