L3 MTH1610
Université Bretagne Sud
2015-2016

Feuille de TD n°4
Séries de Fourier

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique et intégrable sur tout intervalle borné. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2. Déterminer la périodicité et la parité des fonctions suivantes. Dessiner leurs graphes et calculer le développement en série de Fourier des fonctions suivantes.

1. $f_1(t) = |t|$ sur $[-1, 1]$, prolongée en une fonction 2-périodique.
2. $f_2(t) = |\sin(t)|$ sur $\mathbb{R}$.
3. $f_3(t) = \begin{cases} t(\pi - t) \text{ sur } [0, \pi[, \\ (2\pi - t)(t - \pi) \text{ sur } [\pi, 2\pi[\end{cases}$, prolongée en une fonction 2π-périodique.
4. $f_4(t) = \frac{t}{T}$ sur $[0, T]$, prolongée en une fonction T-périodique, $T > 0$.
5. $f_5(t) = \begin{cases} 1 \text{ sur } [0, \pi[, \\ -1 \text{ sur } [\pi, 2\pi[\end{cases}$, prolongée en une fonction 2π-périodique.
6. $f_6(t) = \mathrm{e}^{i\pi z t}$ sur $[0, 2]$, prolongée en une fonction 2-périodique, où $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique et localement intégrable. On définit $\check{f}(t) = f(-t)$ et $\tau_{t_0} f(t) = f(t - t_0)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer alors les coefficients de Fourier $c_n\left(\check{f}\right)$ et $c_n\left(\tau_{t_0}\right)$ en fonction de ceux de f.
2. Si de plus la fonction est de classe $\mathscr{C}^p$, donner les coefficients de Fourier $c_n\left(f^{(p)}\right)$ en fonction de ceux de f.
3. Déduire de l'exercice précédent le développement en série de Fourier de $|\cos(t)|$.

Exercice 4. Soit f une fonction T-périodique et localement intégrable. Vérifier que F est aussi $2T$-périodique et exprimer ses coefficients $c'_n(f)$ associés à la période $2T$, en fonction des $c_n(f)$. En déduire que les développements en série de Fourier sont identiques.

Exercice 5. Calculer le développement en série de Fourier de la fonction $f(t) = \sin^3(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. On reprend la fonction f_5 de l'exercice 2. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $S_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad S_N(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin\left((2n+1)x\right)}{2n+1}.$$

1. Justifier que S_N est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que

   $$S'_N(0) = 4(N+1)/\pi, \qquad S'_N(\pi) = -4(N+1)/\pi,$$

   et que

   $$\forall x \in]0, \pi[, \qquad S'_N(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin\left(2(N+1)x\right)}{\sin(x)}.$$

   En déduire que S_N possède $2(N+1)$ extremums entre $[0, \pi]$, que le premier et le dernier sont des maximums et que le premier est atteint en $\pi/(N+1)$.

2. Justifier que
$$S_N\left(\frac{\pi}{N+1}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{N+1}}\frac{\sin\left(2(N+1)t\right)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t.$$
3. On pose pour tout $N \geqslant 1$ $u_N : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall s \in]0,\pi], \qquad u_N(s)=\frac{\sin(s)}{2(N+1)\sin\left(\frac{s}{2(N+1)}\right)},$$
et $u_N(0)=1$. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(u_N)_{N\geqslant 1}$ sur $[0,\pi]$.
4. Montrer par un développement de Taylor de la fonction sinus que, pour tout réel x,
$$x-\frac{x^2}{2}\leqslant \sin(x)\leqslant x+\frac{x^2}{2}.$$
5. En déduire que $(u_N)_{N\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0,\pi]$.
6. Montrer à l'aide des questions précédentes que $S_N\left(\frac{\pi}{N+1}\right)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(s)}{s}\,\mathrm{d}s$.

Exercice 7. Développer en série de Fourier la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x)=\frac{\sin(x)}{5-3\cos(x)}$.

Exercice 8. Développer en série de Fourier la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x)=\frac{1}{\cos(x)+\mathrm{ch}(a)}$, avec $a>0$. En déduire $\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{\cos(x)+\mathrm{ch}(a)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 9. Pour chaque fonction de l'exercice 2, donner le type de convergence de la série de Fourier associé puis montrer les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$.
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}$.

Exercice 10. Déterminer les fonctions 2π périodiques et $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant la propriété suivante,
$$\exists a>0,\ \exists M>0 \ \text{ tels que } \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\quad \left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant M\,a^n.$$

Exercice 11. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π-périodique, définie par $f(x)=\cos(\alpha x)$ pour $x\in[-\pi,\pi]$ où $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. A l'aide de son développement en série de Fourier, montrer que pour $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$,
$$\pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{\sin(\pi x)}=\frac{1}{x}+2x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x^2-n^2}.$$