L3 MTH1610
Université Bretagne Sud
2015-2016

Feuille de TD n°3
Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

Exercice 1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers f. Que dire de f si toutes les fonctions f_n sont paires ? croissantes ? strictement croissantes ?

Exercice 2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions de I dans E. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (respectivement $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$) converge uniformément vers f (respectivement g) sur I.

1. Montrer que $(f_n+g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f+g$.
2. On suppose $E=\mathbb{R}$. Trouver des conditions suffisantes pour que la suite $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers fg.

Exercice 3. On considère $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par,

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in]-\infty,0]\\ n^2x & \text{si } x\in[0,1/n]\\ (1-n^2)x+2n-n^{-1} & \text{si } x\in[1/n,2/n]\\ 1/n & \text{si } x\in[2/n,+\infty[\end{cases}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer, sans trop de calcul, que $(f_n\circ f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas simplement vers $f\circ f$.
3. On considère une suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une fonction g. On suppose que pour tout n la fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que la suite $(g_n\circ g_n)_{n\in\mathbb{R}}$ converge simplement vers $g\circ g$.
4. On considère à présent la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ définie par pour tout $n\geqslant 1$ et tout $x\in\mathbb{R}$,

$$h_n(x)=x^2+\frac{1}{n}.$$

1. Montrer que $(h_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction h que l'on déterminera.
2. Montrer que la suite $(h_n\circ h_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $h\circ h$.

Exercice 4. Déterminer la nature de la suite de terme général,

$$I_n=\int_0^1\frac{n\,\mathrm{e}^{-x}+x^2}{n+x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 5. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par, pour tout $n\geqslant 1$ et tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,

$$u_n(x)=n\,|\ln(x)|^n\,.$$

1. Étudier le domaine D de convergence simple de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ainsi que la fonction limite u.
2. A-t-on convergence uniforme sur le domaine D ? Sur les compacts de D ?

Exercice 6. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u_n(x) = \mathrm{e}^{-nx^n} .$$

1. Étudier le domaine D de convergence simple de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ainsi que la fonction limite u.
2. Justifier sans calcul le fait que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément vers u sur D tout entier. Démontrer que la convergence est uniforme sur $[1, +\infty[$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément vers u sur $[0, 1[$.
4. Soit $0 \leqslant a < b < 1$. Montrer que la convergence est uniforme sur $[a, b]$.
5. On pose pour tout $n \geqslant 0$, $v_n = u_n'$. Déterminer la domaine de convergence simple de la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$.
6. Étudier la convergence uniforme de $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sur $[0, +\infty[$, $[0, 1[$ et $[1, +\infty[$.

Exercice 7. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$u_n(x) = \frac{n\sin(nx)}{1 + n^2x^2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{n}{1 + \frac{\pi^2}{4}} \leqslant \sup_{x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} |u_n(x)| \leqslant n$$

   et en déduire que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement mais non uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Justifier que l'intégrale impropre

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{1 + u^2}\,\mathrm{d}u,$$

   est convergente.
3. Montrer que $0 < I < \arctan(x)$.
   Indication : on pourra montrer que la suite $I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ *est alternée.*
4. On pose pour tout $n \geqslant 1$,

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Montrer que $(J_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente, quelle est sa limite ?

Exercice 8. Pour $a < b$ deux réels et $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel, on considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[a, b]$ dans E, convergeant simplement vers une fonction f. On suppose que les fonctions f_n sont toutes lipschitziennes pour une même constante k,

$$\exists k > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in [a, b]^2, \qquad \|f_n(x) - f_n(y)\| \leqslant k\,|x - y| .$$

1. Montrer que la fonction f est k-lipschitzienne.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.
   Indication : procéder par l'absurde.

Séries de fonctions

Exercice 9. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx^2}}{n^2+1}.$$

Exercice 10. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{n+x}.$$

Exercice 11. Montrer que la série de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

converge uniformément sur $[0,1]$ mais ne converge pas normalement ni même absolument sur $[0,1]$.

Exercice 12.

1. Déterminer le domaine de convergence simple de la série,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-kx^k}.$$

2. Montrer que la fonction

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^n}$$

est continue et dérivable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 13. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_n(x) = \frac{x^n \ln(x)}{n} \text{ si } x > 0.$$

1. Montrer que cette série converge normalement sur $[0,1]$ et en déduire que

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

2. Calculer la somme de cette dernière série sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
3. Démontrer que $\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$ converge et que

$$\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 14.

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{x^2 \ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ est convergente.
2. On pose, pour tout $N \geqslant 1$, tout $x \in \mathbb{R}$,
$$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} -x^{2n}\ln(x).$$
Montrer que
$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 R_N(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$
3. En déduire que
$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$
4. Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ en déduire la valeur de I.

Exercice 15. On considère une série de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $n \geqslant 1$,
$$f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note S la fonction somme.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.
3. Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} S(1/p) = +\infty$ et par un argument de monotonie, en déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} S(x)$.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} xS(x)$.
Indication : faire une comparaison série-intégrale.