L3 MTH1610
Université Bretagne Sud
2015-2016

Feuille de TD n°2
Calcul différentiel

Exercice 1. Justifier que les deux fonctions suivantes sont différentiables, calculer leurs gradients et en déduire leurs différentielles,

$$f(x,y,z) = 2 + 3z + xy + z\sin\left(x^2+y^2\right), \qquad g(x,y) = 1 + x\sqrt{y^2+2}.$$

Exercice 2. Calculer la jacobienne des applications suivantes,

$$\begin{array}{ll} f_1(x,y,z) = (\sin(xyz),\, x + \mathrm{e}^z,\, y+z)\,, & f_2(x,y,z) = (x\,\mathrm{ch}(y),\, \mathrm{e}^y\cos(z))\,, \\ f_3(x,y,z) = \mathrm{e}^{xy}\,(\cos(z)+\sin(y))\,, & f_4(x,y) = \left(x,\, y\,\mathrm{e}^x,\, xy^2\right)\,, \\ f_5(x) = \left(\mathrm{e}^x,\, x^3,\, \cos(x)\right)\,. & \end{array}$$

Exercice 3. Soit $f(x,y)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage du cercle unité, $x^2+y^2=1$. Pour tout nombre réel θ on pose $F(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$. Calculer $F''(0)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)$.

Exercice 4. Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$. On effectue le changement de variable en coordonnées polaires en définissant

$$\begin{array}{llll} g: & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (r,\theta) & \mapsto & f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)). \end{array}$$

1. Justifier que g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.
2. Calculer, en inversant une certaine matrice, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$.
3. Déterminer toutes les fonctions $\mathscr{C}^1$ vérifiant
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Exercice 5.

1. Trouver les applications $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$.
2. Trouver les applications $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

   Indication : poser $\varphi(u,v) = \frac{1}{2}(u+v, u-v)$ et $G = F \circ \varphi$.

Exercice 6. Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 1\} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right). \end{array}$$

Justifier que f est $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition et calculer Df. En déduire les valeurs de f.

Exercice 7. Montrer que l'identité des accroissements finis n'est pas vraie pour les fonctions vectorielles en considérant

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (\cos(x), \sin(x)). \end{array}$$

Exercice 8. Écrire le développement de Taylor à l'ordre de 2 au voisinage de $(0,0)$ de la fonction f définie par $f(x,y) = \frac{\mathrm{e}^x}{\cos y}$. En déduire la limite quand (x,y) tend vers $(0,0)$ de $\frac{\mathrm{e}^x - (1+x)\cos y}{(x^2+y^2)\cos y}$.

Exercice 9. Déterminer les extremums et dire s'ils sont locaux ou globaux des applications suivantes.

1. $f_1(x,y) = x^2 - y^2$.
2. $f_2(x,y) = x^3 - y^3$.
3. $f_3(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
4. $f_4(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$.

Exercice 10. Déterminer suivant les valeurs du paramètre λ, la nature des extremums de la fonction

$$f(x,y) = y(x^2 + y^2 - 2\lambda y).$$

Exercice 11. Étudier les extrema de la fonction

$$f(x,y,z) = x^2y + y^2z + 2x - z.$$

Exercice 12. Déterminer le volume maximal d'un parallélépipède rectangle dont la surface fait $2m^2$.

Exercice 13. Déterminer les extremums de la fonction f définie sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant 0,\ y \leqslant 0,\ x + y \geqslant -3\}$ par

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y.$$