L2 MTH1314 2015-2016

Feuille 3. Morphismes, anneaux, corps

Exercice 1. Soient G et H deux groupes.

1. Montrer que l'application $\pi : G \times H \to G$ définie par $\forall (g,h) \in G \times H$, $\pi(g,h) = g$ est un morphisme de groupes et déterminer alors le noyau et l'image de ce morphisme.
2. Déterminer les éléments $h \in H$ qui font de l'application $i_h : G \to G \times H$ définie par $\forall g \in G$, $i_h(g) = (g,h)$, un morphisme de groupes. Déterminer alors le noyau et l'image de ce morphisme.

Exercice 2. Soit G un groupe.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'inversion $J : G \to G$ définie par $\forall g \in G$, $J(g) = g^{-1}$, soit un morphisme de groupes.
2. Même question pour le carré $q : G \to G$ défini par $\forall g \in G$, $q(g) = g^2$.

Exercice 3. Montrer que $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (2\mathbb{Z}, +)$ défini par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = 2n$, est un isomorphisme de groupes.

Exercice 4. Soit G un groupe noté multiplicativement et a un élément de G. On désigne par f_a l'application de G dans G définie par $f_a(x) = axa^{-1}$.

1. Montrer que f_a est un automorphisme de G, c'est-à-dire un isomorphisme de G dans lui-même. On l'appelle "automorphisme intérieur". On désigne par Aut G l'ensemble des automorphismes de G, et par Int G l'ensemble des automorphismes intérieurs de G.
2. Montrer que l'application $\begin{aligned} \varphi : G &\to \text{Aut } G \\ a &\mapsto f_a \end{aligned}$ est un morphisme de groupes, dont on déterminera l'image et le noyau.
3. Que peut on en déduire pour $(\text{Int } G, \circ)$?

Exercice 5. On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Montrer que l'application $\varphi : x \mapsto x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\varphi(x * y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. En déduire que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice 6. Déterminer tous les morphismes de groupes injectifs, surjectifs puis bijectifs de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 7. Montrer que l'anneau $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif.

Exercice 8. L'ensemble $2\mathbb{Z}$ muni des lois $+$ et $\times$ est-il un anneau ?

Exercice 9. On considère l'ensemble $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ des nombres réels de la forme $a + b\sqrt{2}$, où $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que pour tout $x \in A$, il existe un unique couple $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = m + n\sqrt{2}$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
3. On considère l'application $$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] &\to \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \\ m + n\sqrt{2} &\mapsto m - n\sqrt{2} \end{aligned}$$
   Montrer que ϕ est un automorphisme de l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ (c'est une bijection, et un morphisme pour chacune des deux lois).

4. Pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $N(x) = x\phi(x)$. Montrer que N est une application de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{Z}$, qui est un morphisme pour la multiplication.
5. En déduire que x est inversible si et seulement si $N(x) = \pm 1$.
6. Vérifier que $3 + 2\sqrt{2}$ et $-3 + 2\sqrt{2}$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Exercice 10. On considère $(\mathbb{R}^2, +, *)$ où $+$ est l'addition des couples de réels :

$$\forall (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

et $*$ une loi de composition interne définie par :

$$\forall (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad (a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, *)$ est un corps et le reconnaître.