L2 MTH1314 2015-2016

Feuille 2. Groupes, sous-groupes

Exercice 1. Pour chacun des ensembles suivants, muni de la loi indiquée, vérifier que la loi est une l.c.i. et dire si elle est associative, commutative, s'il existe un élément neutre ou si tout élément admet un inverse. En déduire si c'est un groupe ou non.

1. $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.
2. $(GL_n(\mathbb{R}), +)$.
3. $(\mathbb{Z}^*, \times)$.
4. $(\mathbb{R}, *)$ où la loi $*$ est définie par $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x * y = |x|\, y$.
5. $(\mathbb{R}^*, *)$ où la loi $*$ est définie par $\forall(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $x * y = \frac{1}{xy}$.
6. $(\mathbb{R}^*, *)$ où la loi $*$ est définie par $\forall(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $x * y = \frac{x}{y}$.
7. $(GL_n(\mathbb{R}), *)$ où la loi $*$ est définie par $\forall(A, B) \in GL_n(\mathbb{R})^2$, $A * B = BA$.

Exercice 2. On définit sur $\mathbb{R}$ la l.c.i. $*$ par $a * b = a + b - ab$.

1. $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ?
2. Déterminer un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui soit un groupe pour la loi $*$.

Exercice 3. Soient $(G_1, *)$ et (G_2, ∇) deux groupes. On munit l'ensemble $G_1 \times G_2$ de la loi : $(g_1, g_2) \otimes (h_1, h_2) = (g_1 * h_1, g_2 \nabla h_2)$. Montrer que $(G_1 \times G_2, \otimes)$ est un groupe. On parle de "structure produit canonique" pour $G_1 \times G_2$.

Exercice 4.

1. Écrire la table du groupe à deux éléments.
2. Soit $G = \{e, a, b\}$ un groupe à 3 éléments, d'élément neutre e. Montrer que $b = a^{-1}$.
3. Construire la table du groupe G.
4. Vérifier que G est commutatif.
5. Montrer que cette table est celle du groupe $\mathbb{U}_3 = (\{1, j, j^2\}, \times)$, où $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$, et aussi celle du sous-groupe G de $(\mathcal{S}_3, \circ)$ défini par

$$G = \left\{ \mathrm{Id}\,, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 5. Soit $G = \{e, a, b, c\}$ un groupe à 4 éléments, d'élément neutre e.

1. Montrer qu'il existe au moins un élément autre que e qui est son propre symétrique.
2. On suppose par la suite que $b^{-1} = b$. Montrer alors qu'on peut distinguer deux cas : soit $a^{-1} = c$ et $c^{-1} = a$, soit $a^{-1} = a$ et $c^{-1} = c$ et construire les deux tables correspondantes.
3. Montrer que la première table est celle du groupe $\mathbb{U}_4 = (\{1, i, -1, -i\}, \times)$, et aussi celle du sous-groupe G de $(\mathcal{S}_4, \circ)$ défini par

$$G = \left\{ \mathrm{Id}\,, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Montrer que la deuxième table est celle du sous-groupe H de $(\mathcal{S}_4, \circ)$ défini par

$$H = \left\{ \mathrm{Id}\,, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

5. Vérifier que tous ces groupes sont commutatifs.

Exercice 6. Soit E un ensemble fini et non vide. Soit $*$ une loi de composition interne pour E. On suppose les propriétés suivantes.

$C1$. La loi $*$ est associative.

$C2$. Pour tout $a \in E$ et tout $(x, y) \in E^2$, on a $a * x = a * y \Rightarrow x = y$.

$C2$. Pour tout $a \in E$ et tout $(x, y) \in E^2$, on a $x * a = y * a \Rightarrow x = y$.

On considère pour tout $a \in E$ l'application γ_a définie par,

$$\gamma_a : \quad \begin{aligned} E &\to E \\ x &\mapsto a * x. \end{aligned}$$

1. Montrer que γ_a est bijective.
   Indication : quand E est fini, une application de E dans E est bijective si et seulement si elle est injective si et seulement si elle est surjective.
2. Montrer qu'il existe e_1 dans E tel que $a = a * e_1$.
3. En déduire que $\forall b \in E$, $b = e_1 * b$.
4. Démontrer l'existence d'un élément neutre.
5. Conclure que $(E, *)$ est un groupe.

Exercice 7. Soit G un groupe, H une partie de G. Montrer que H est un sous-groupe de G si et seulement si : H est non vide et pour tout x, y éléments de H, xy^{-1} est encore élément de H.

Exercice 8.

1. L'ensemble B des matrices du type $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$, est-il un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$?
2. Même question pour l'ensemble D des matrices diagonales de $GL_2(\mathbb{R})$, puis pour l'ensemble T des matrices triangulaires supérieures de $GL_2(\mathbb{R})$.
3. L'ensemble H des matrices du type $\begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$, est-il un groupe pour la multiplication matricielle ? Est-ce un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$?

Exercice 9. Soit G un groupe, G_1 et G_2 deux sous-groupes de G.

1. Montrer que $G_1 \cap G_2$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que $G_1 \cup G_2$ est un sous-groupe de G si et seulement si : $G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$.

Exercice 10. Soient a et b deux entiers relatifs. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{Z}$. En déduire que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, où d est le PGCD de a et b, et $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$, où m est le PPCM de a et b.

Exercice 11. On considère le sous-ensemble Q_8 de l'ensemble $GL_2(\mathbb{R})$ des matrices inversibles, formé des 8 matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; -I, \; J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; -J, \; T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; -T, \; U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; -U.$$

1. Écrire la table de composition de $(Q_8, \times)$.
2. Montrer que $(Q_8, \times)$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.
3. Est-ce un groupe commutatif ?
4. Déterminer tous les sous-groupes de Q_8.