L2 MTH1314 2015-2016

Devoir Maison n˚1
A rendre pour le 15 Octobre

Exercice 1. On note l'ensemble des matrices symétriques par $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = M\}$ et l'ensemble des matrices antisymétriques par $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = -M\}$. Montrer proprement que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(S, A) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ tel que,

$$M = S + A.$$

Exercice 2. Soit G un **ensemble** non vide et $*$ une l.c.i. associative pour G. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $g \in G$, on note $g^n = \underbrace{g * g * \cdots * g}_{n \text{ fois}}$. On suppose les trois affirmations suivantes :

$$\begin{aligned}
&C1.\ \forall g \in G,\ \exists (p,q) \in \mathbb{N},\ 0 < p < q,\ \text{ tel que } g^p = g^q,\\
&C2.\ \forall (a,g,h) \in G,\ a * g = a * h \Rightarrow g = h,\\
&C3.\ \forall (a,g,h) \in G,\ g * a = h * a \Rightarrow g = h.
\end{aligned}$$

On fixe $g \in G$.

1. Montrer qu'il existe $e_g \in G$ tel que $e_g * g = g * e_g = g$.
2. Montrer que pour tout $h \in G$, $e_g * h = h * e_g = h$.
3. Conclure que G est un groupe.

Exercice 3. Soit $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ un morphisme pour les lois $+$ et $\times$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2, \qquad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2, \qquad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

1. Montrer que $\varphi(1) = 1$ ou 0.
2. On suppose dans cette question que $\varphi(1) = 1$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = n$.
   (b) Montrer que $\varphi(-1) = -1$ et en déduire que $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\varphi(p) = p$.
   (c) Conclure que $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$.
3. Que se passe-t-il lorsque $\varphi(1) = 0$?