M1 MEEF 2014-2015

Devoir Maison
Equations Différentielles, Espaces Vectoriels Normés,
Calcul Différentiel et Statistique
A rendre pour le 9 Janvier

Exercice 1. *Equations Différentielles.*
On considère une particule dans l'espace, de masse m et de charge q, soumise à la fois à un champ éléctrique constant (homogène et stationnaire) noté

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix},$$

et à la fois à un champ magnétique constant également, de direction Oz,

$$\vec{B} = B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On pose,

$$\vec{M}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

le vecteur position de la particule donné en fonction du temps t. On sait que la force de Lorentz est alors donnée par,

$$\vec{F}(t) = q\vec{M}'(t) \wedge \vec{B} + q\vec{E}.$$

Rappel : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -(x_1y_3 - x_3y_1) \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$

1. À l'aide de la 2ème loi de Newton reliant force, masse et accélération, montrer que

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = M'(t)$$

   est solution d'un système différentiel,

$$Y'(t) = \omega AY(t) + C,$$

   avec $\omega = \frac{qB}{m}$, A une matrice à déterminer et C un vecteur colonne à déterminer également.

2. Démontrer que l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions Y de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$Y'(t) = \omega AY(t), \qquad (1)$$

   est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1([0;+\infty[, \mathbb{R}^3)$.

3. À l'aide d'un théorème du cours, montrer que l'application φ de $\mathscr{S}$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par,

$$\forall Y \in \mathscr{S}, \qquad \varphi(Y) = Y(0),$$

   est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

4. En déduire que $\mathscr{S}$ est un espace vectoriel de dimension 3.
5. Montrer que A est diagonalisable et donner la matrice diagonale D et la matrice de passage P associées.
6. Donner le système différentiel vérifié par $Z(t) := P^{-1}Y(t)$ et le résoudre.
7. En déduire les solutions complexes de $Y(t)$ puis les solutions réelles.
8. En déduire $M(t)$.
9. Résoudre complètement le problème lorsque les conditions initiales sont

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad M'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{E} = \vec{0}.$$

   et donner schématiquement l'allure de la trajectoire.
10. Même question pour

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad M'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. *Espaces Vectoriels Normés.*
On considère E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les fonctions f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe $L > 0$ telle que pour tout x et y dans $[0,1]$ on a,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L\,|x - y|\,.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, l'ensemble des fonction continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
2. On note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$, la norme sup de f. On considère N l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall f \in E, \qquad N(f) = \|f\|_\infty + \sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

   Jusitifier que N est bien définie.
3. Montrer que N est une norme.
4. Montrer que tout ouvert pour $\|.\|_\infty$ est ouvert pour $N(.)$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : \qquad \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{array}$$

   est un élément de E et calculer $N(f_n)$.
6. La norme N est-elle équivalente à $\|.\|_\infty$?
7. On considère $E_1 = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que E_1 est inclus dans E.
8. Vérifier que $N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ est aussi une norme et montrer que pour tout $f \in E_1$ on a,

$$N_1(f) = N(f).$$

Exercice 3. *Calcul Différentiel.*
On considère l'application,

$$f : \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$X \mapsto \|AX - B\|^2$$

où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice fixée, $B \in \mathbb{R}^n$ un vecteur fixé et $\|.\|$ la norme euclidienne canonique définie, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, par $\|X\| = \sqrt{{}^tXX}$. On note également $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ défini, pour tout $(X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, par $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$.

1. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et
$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \forall H \in \mathbb{R}^n, \qquad Df(X).H = 2\langle AX - B, AH \rangle.$$
2. On rappelle que si une application différentiable f admet un extremum au point X_0 alors $Df(X_0)$ est l'application nulle. Montrer que si f admet un minimum en X_0 alors
$${}^tAAX_0 = {}^tAB.$$
3. Montrer que si ${}^tAAX_0 = {}^tAB$ alors X_0 est un minimum.

Exercice 4. *Statistique.*
On considère deux machines A et B fabriquant des pièces en série. On possède les résultats suivants, sur les 2700 pièces fabriquées par la machine A, 50 sont défectueuses et sur les 1600 de la machine B, 35 sont défectueuses. On se propose de construire un test à 95% pour savoir si la machine A est moins bien réglée que la machine B ou non. Soit X_1 la variable aléatoire valant 1 si la pièce 1 de la machine A est défectueuse et 0 sinon. On note par θ_1 la probabilité que la pièce 1 soit défectueuse.

1. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathrm{Var}(X_1)$.
2. On note $n_1 = 2700$, $n_2 = 1600$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n_1$ on pose X_i valant 1 si la pièce i de la machine A est défectueuse et 0 sinon ; pour tout $1 \leqslant j \leqslant n_2$, Y_j la variable aléatoire valant 1 si la pièce j de la machine B est défectueuse et 0 sinon et enfin on note θ_2 la probabilité que la pièce 1 soit défectueuse. Quelles hypothèses raisonnables mettre sur les suites $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n_1}$ et $(Y_i)_{1\leqslant j\leqslant n_2}$?
3. On note $X = X_1 + \cdots + X_{n_1}$ et $Y = Y_1 + \cdots + Y_n$. Que représente X ? Quelle est sa loi ? Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
4. Traduire l'hypothèse nulle H_0 « La machine A est plus défectueuse que la machine B »avec les notations précédentes.
5. Donner un estimateur naturel de θ_1. Quel théorème permet de dire qu'il est consistant ? Est-il sans biais ?
6. On note désormais $\bar{X}_{n_1} := \frac{X_1 + \ldots X_{n_1}}{n_1}$ et de même $\bar{Y}_{n_2} := \frac{Y_1 + \ldots Y_{n_2}}{n_2}$. On cherche à construire une zone R de rejet, c'est-à-dire un événement aléatoire qui, lorsqu'il est réalisé, nous pousse à affirmer que l'hypothèse nulle H_0 est fausse. On fixe x_α un réel dont on choisira la valeur plus tard. Compléter avec le symbole qui convient,
$$R := \{\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2}\ \ldots\ x_\alpha\},$$
et le justifier en quelques mots.
7. Pourquoi pour n_1 et n_2 assez grands approche-t-on $\bar{X}_{n_1}$ et $\bar{Y}_{n_1}$ par
$$\bar{X}_{n_1} \simeq \frac{N_1\sqrt{\theta_1(1-\theta_1)}}{\sqrt{n_1}} + \theta_1 \qquad \text{et} \qquad \bar{Y}_{n_2} \simeq \frac{N_2\sqrt{\theta_2(1-\theta_2)}}{\sqrt{n_2}} + \theta_2, \tag{2}$$
où N_1 et N_2 sont indépendantes et suivent la loi $\mathscr{N}(0,1)$?

8. On rappelle que la fonction caractéristique d'une gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ pour $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_N(t) = e^{itm} e^{-\frac{t^2 \sigma^2}{2}}.$$

Donner alors la loi de $\frac{N_1\sqrt{\theta_1(1-\theta_1)}}{\sqrt{n_1}} + \theta_1$ et de $\frac{N_2\sqrt{\theta_2(1-\theta_2)}}{\sqrt{n_2}} + \theta_2$.

9. On définit,

$$Z = \frac{N_1\sqrt{\theta_1(1-\theta_1)}}{\sqrt{n_1}} + \theta_1 - \frac{N_2\sqrt{\theta_2(1-\theta_2)}}{\sqrt{n_2}} - \theta_2.$$

Trouver la loi de Z.

10. Sous l'approximation (2), on redéfinit la zone de rejet par (avec le même symbole qu'à la question 6, que l'on notera ∇ non non je ne vais pas vous le donner),

$$R_1 = \{Z \ \nabla \ x_\alpha\}.$$

On cherche à minimiser l'erreur de première espèce,

$$\alpha = \sup_{0 \leqslant \theta_2 < \theta_1 \leqslant 1} \mathbb{P}_{(\theta_1, \theta_2)}\left(R_1\right),$$

où $\mathbb{P}_{(\theta_1,\theta_2)}$ est la probabilité sous laquelle X_1 a pour probabilité θ_1 de valoir 1 et Y_1 a pour probabilité θ_2 de valoir 1. On suppose la variance de Z fixée, dire sans justifier s'il faut choisir sa moyenne plutôt grande ou plutôt petite pour maximiser $\mathbb{P}_{(\theta_1,\theta_2)}\left(R_1\right)$. En déduire une relation entre θ_1 et θ_2 pour maximiser $\mathbb{P}_{(\theta_1,\theta_2)}\left(R_1\right)$ sous la contrainte $0 \leqslant \theta_2 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$ (et en considérant toujours la variance comme étant fixée).

11. On suppose cette relation vérifiée et la moyenne de Z fixée. On admet que x_α est négatif. Dire sans justifier s'il faut choisir sa variance plutôt grande ou plutôt petite pour maximiser $\mathbb{P}_{(\theta_1,\theta_2)}\left(R_1\right)$ et en déduire les valeurs de θ_1 et de θ_2 associées.

12. On prendra donc pour x_α le réel pour que, avec $N \sim \mathcal{N}(0,1)$,

$$\alpha = \mathbb{P}\left(N \nabla 2x_\alpha \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}\right).$$

Pour $\alpha = 0.05$ les tables de la gaussienne nous donne,

$$2x_\alpha \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} = -1.645.$$

En déduire la valeur de x_α.

13. Conclure si ce test, au niveau 95%, rejette l'hypothèse H_0 ou non.