MTH1610
Université de Bretagne-Sud,
Avril 2015

Feuille de TD n°6
Séries de Fourier

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique et intégrable sur tout intervalle borné. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2. Déterminer la périodicité et la parité des fonctions suivantes. Dessiner leurs graphes et calculer le développement en série de Fourier des fonctions suivantes.

1. $f(t) = |t|$ sur $[-1, 1]$, prolongée en une fonction 2-périodique.
2. $f(t) = |\sin(t)|$ sur $\mathbb{R}$.
3. $f(t) = \begin{cases} t(\pi - t) \text{ sur } [0, \pi[, \\ (2\pi - t)(t - \pi) \text{ sur } [\pi, 2\pi[\end{cases}$, prolongée en une fonction 2π-périodique.
4. $f(t) = \frac{t}{T}$ sur $[0, T]$, prolongée en une fonction T-périodique, $T > 0$.
5. $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ sur } [0, \pi[, \\ -1 \text{ sur } [\pi, 2\pi[\end{cases}$, prolongée en une fonction 2π-périodique.
6. $f(t) = \mathrm{e}^{i\pi z t}$ sur $[0, 2]$, prolongée en une fonction 2-périodique, où $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique, $\mathscr{C}^1$ par morceaux. On définit $\check{f}(t) = f(-t)$ et $\tau_{t_0} f(t) = f(t - t_0)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer alors les coefficients de Fourier $c_n\left(\check{f}\right)$, $c_n\left(f'\right)$ et $c_n\left(\tau_{t_0}\right)$ en fonction de ceux de f.
2. Déduire de l'exercice précédent le développement en série de Fourier de $|\cos(t)|$.

Exercice 4. Calculer le développement en série de Fourier de la fonction $f(t) = \sin^3(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. A l'aide de l'exercice 2, montrer les égalités suivantes.

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.
4. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$.

Exercice 6. Soit $f \in \mathrm{L}^2([0, T])$ et $c_n(f)$ ses coefficients de Fourier associés. Montrer que si f est T-périodique alors f est aussi dans $\mathrm{L}^2([0, 2T])$ et exprimer ses coefficients $c'_n(f)$ associés à la période $2T$, en fonction des $c_n(f)$. En déduire que les développements en série de Fourier sont identiques.

Exercice 7. Développer en série de Fourier la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \frac{\sin(x)}{5-3\cos(x)}$.

Exercice 8. Développer en série de Fourier la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)+\operatorname{ch}(a)}$, avec $a > 0$. En déduire $\int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{\cos(x)+\operatorname{ch}(a)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 9. Soit f une fonction dérivable sur $[0, 2\pi]$ dont la dérivée f' est dans $\mathrm{L}^2([0, 2\pi])$. On suppose que $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer alors que

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{2\pi} f'^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

et discuter du cas d'égalité.

Exercice 10. Soit f une fonction T-périodique dans $\mathrm{L}^1([0, T])$ dont la série de Fourier converge uniformément. Notons g sa limite.

1. Montrer que g est T-périodique, continue et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(g) = c_n(f)$.
2. En déduire que f est égale à sa série de Fourier.
3. Que dire du cas où la série de Fourier converge absolument, $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n(f)| < +\infty$?

Exercice 11. Déterminer les fonctions 2π périodiques et $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant la propriété suivante,

$$\exists a > 0,\ \exists M > 0 \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M\,a^n.$$

Exercice 12. Soit f une fonction continue et 2π-périodique telle que,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_{2n+1}(f) = 0.$$

Montrer que f est π-périodique.

Convergence ponctuelle

Exercice 13. Pour chaque fonction de l'exercice 2, donner le type de convergence de la série de Fourier associé puis montrer les égalités suivantes.

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.
5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.
6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie par $f(x) = \cos(\alpha x)$ pour $x \in [-\pi, \pi]$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. A l'aide de son développement en série de Fourier, montrer que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + 2x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2-n^2}.$$

Exercice 15. Soit f une fonction 2π-périodique, continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Montrer que

$$c_n\left(f^2\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\, c_{n-k}(f).$$

Montrer que le résultat reste vrai si l'on suppose uniquement $f \in \mathrm{L}^2([0, 2\pi])$.