MTH1610
Université de Bretagne-Sud,
Mars 2015

Feuille de TD n^{o}5
Séries Entières

Exercice 1. Pour $a > 0$ déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{\ln(\mathrm{ch}(an))}$.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n^{\sqrt{n}} z^n$.

Exercice 3. Déterminer le rayon de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ où pour tout $n \geqslant 1$, a_n est la somme de tous les diviseurs de n.

Exercice 4. On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{2n+1}$.

1. Déterminer son rayon de convergence R.
2. Pour $x = R$ et $x = -R$ la série converge-t-elle ?
3. Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$ calculer, en distinguant les cas $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$, la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.

Exercice 5. Pour $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle, non identiquement nulle $F \neq 0$, et $\sum_n a_n z^n$ une série entière dont on note R le rayon de convergence, montrer que la série entière $\sum_n a_n F(n) z^n$ possède le même rayon de convergence R.

Exercice 6. Développer en série entière la fonction $f(x) = \arctan\left(\frac{x\sin(\alpha)}{1-x\cos(\alpha)}\right)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.

Exercice 7. On considère la série entière $\sum_n a_n z^n$ où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et par récurrence, pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+2} = ua_{n+1} + va_n$, avec u et v deux réels positifs.

1. Justifier que la série entière possède un rayon de convergence strictement positif.
2. Calculer la somme totale, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
3. En déduire pour tout $n \geqslant 0$, a_n en fonction de n.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2} u_n$. Le but est de déterminer u_n sous forme d'une somme $\sum_{k=\dots}^{\dots} \dots$

1. Montrer que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \frac{x^{n+2}}{n+2}$ possède un rayon de convergence R strictement positif.
2. On définit alors pour tout $|x| < R$, la fonction somme $g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{x^{n+2}}{n+2}$. Montrer que g vérifie l'équation différentielle $g'(x)(1-x) = 2xg(x) + x$.
3. En déduire g puis u_n sous forme d'une somme finie.

Exercice 9. Développer en série entière la fonction $f(x) = \mathrm{ch}(2x)\cos(2x)$ en utilisant une équation différentielle d'ordre 4.

Exercice 10. Développer en série entière la fonction $f(x) = \sin^2(x)\mathrm{sh}^2(x)$.