MTH1610
Université de Bretagne-Sud,
Février 2015

Feuille de TD n°4
Suites et Séries de Fonctions

Suites de fonctions

Exercice 1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers f. Que dire de f si toutes les fonctions f_n sont paires ? croissantes ? strictement croissantes ?

Exercice 2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions de I dans E. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (respectivement $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$) converge uniformément vers f (respectivement g) sur I.

1. Montrer que $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f + g$.
2. On suppose $E = \mathbb{R}$. Trouver des conditions suffisantes pour que la suite $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers fg.

Exercice 3. On considère $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ n^2 x & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ (1-n^2)x + 2n - n^{-1} & \text{si } x \in [1/n, 2/n] \\ 1/n & \text{si } x \in [2/n, +\infty[\end{cases}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer, sans trop de calcul, que $(f_n \circ f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas simplement vers $f \circ f$.
3. On considère une suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une fonction g. On suppose que pour tout n la fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que la suite $(g_n \circ g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $g \circ g$.
4. On considère à présent la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ définie par pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$,
$$h_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}.$$
   (a) Montrer que $(h_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction h que l'on déterminera.
   (b) Montrer que la suite $(h_n \circ h_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $h \circ h$.

Exercice 4. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{2k}}.$$

1. Déterminer le domaine de convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[1, +\infty[$.

Exercice 5. Déterminer la nature de la suite de terme général,

$$I_n = \int_0^1 \frac{n\,\mathrm{e}^x + x^2}{n+x}\,\mathrm{d}x.$$

Séries de fonctions

Exercice 6. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx^2}}{n^2+1}.$$

Exercice 7. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{n+x}.$$

Exercice 8. Montrer que la série de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n}.$$

converge uniformément sur $[0,1]$ mais ne converge pas normalement ni même absolument sur $[0,1]$.

Exercice 9.

1. Déterminer le domaine de convergence simple de la série,
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-kx^k}.$$
2. Montrer que la fonction $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^n}$ est continue et dérivable sur $[1, +\infty[$.

Exercice 10. On considère une série de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $n \geqslant 1$,

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note S la fonction somme.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.
3. Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} S(1/p) = +\infty$ et par un argument de monotonie, en déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} S(x)$.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} xS(x)$.
Indication : faire une comparaison série-intégrale.

Exercice 11. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_n(x) = \frac{x^n \ln(x)}{n} \ \text{ si } x > 0.$$

1. Montrer que cette série converge normalement sur $[0,1]$ et en déduire que

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

2. Calculer la somme de cette dernière série sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
3. Démontrer que $\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$ converge et que

$$\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x = 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 12.

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{x^2 \ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ est convergente.
2. On pose, pour tout $N \geqslant 1$, tout $x \in \mathbb{R}$,

$$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} -x^{2n}\ln(x).$$

   Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 R_N(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

3. En déduire que

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

4. Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ en déduire la valeur de I.