MTH1610
Université de Bretagne-Sud,
Janvier 2015

Feuille de TD n^{o}2
Calcul différentiel

Théorème des accroissements finis

Exercice 1. Soit

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, xy=1\} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right). \end{array}$$

Justifier que f est $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition et calculer Df. En déduire les valeurs de f.

Exercice 2. Montrer que l'identité des accroissements finis n'est pas vraie pour les fonctions vectorielles en considérant

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (\cos(x), \sin(x)). \end{array}$$

Exercice 3. On considère

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x^2-y, x^2+y^2) \end{array} \qquad \text{et} \qquad g = f \circ f.$$

1. Justifier que f et g sont $\mathscr{C}^1$ et calculer en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $J_f(x,y)$ la jacobienne de f et $J_g(x,y)$ la jacobienne de g.
2. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \overline{B\left((0,0),\rho\right)}$ (la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon ρ), on a $\|Dg(x,y)\| \leqslant \frac{1}{2}$.
3. Montrer que la fonction g admet un unique point fixe dans $\overline{B\left((0,0),\rho\right)}$.

Exercice 4. Soit f une application de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $a < b$ deux réels. On suppose que f est continue et dérivable sur $]a,b[$ et que $f'(x)$ admet une limite noté l_1 quand x tend vers a (par valeurs supérieures). Montrer alors que f se prolonge en une fonction continue sur $[a,b[$ et dérivable à droite en a.
Indication : pour la continuité on rappelle que $\mathbb{R}^n$ est un espace complet et pour la dérivation considérer la fonction $g(x) = f(x) - l_1 x$.

Différentielles d'ordre supérieur

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si} \quad xy \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad xy = 0. \end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exercice 6. Soient E_1, E_2 et F trois espaces vectoriels normés de dimensions finies.

1. Montrer que toute application linéaire $f : E_1 \to F$ est $\mathscr{C}^\infty$ et calculer ses différentielles $D^k f$.
2. Montrer que toute application bilinaire $B : E_1 \times E_2 \to F$ est $\mathscr{C}^\infty$ et calculer ses différentielles $D^k B$.

Exercice 7. Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies et $f : E \to F$ une application de classe $\mathscr{C}^2$. Pour $h \in E$, on définit

$$\varphi_h : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & Df(x).h \end{array}$$

1. Montrer que, pour tout $k \in E$, $D\varphi_h(x).k = D^2 f(x).(h, k)$.
2. Supposons que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(tx) = t^2 f(x)$. Montrer alors que pour tout $x \in E$, $D^2 f(0)(x, x) = 2f(x)$.
3. Soient $x, h, k \in E$ et soit

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & F \\ (t, s) & \mapsto & f(x + th + sk). \end{array}$$

   Calculer $\frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial t}(0, 0)$.

Exercice 8. Soit $f(x, y)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage du cercle unité, $x^2 + y^2 = 1$. Pour tout nombre réel θ on pose $F(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$. Calculer $F''(0)$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0)$.

Exercice 9.

1. Trouver les applications $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$.
2. Trouver les applications $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

   Indication : poser $\varphi(u, v) = \frac{1}{2}(u + v, u - v)$ et $G = F \circ \varphi$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $Df(x)$ est un automorphisme orthogonale, c'est-à-dire que $Df(x)$ est linéaire, bijective et conserve le produit scalaire : pour tout $x, h, k \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle Df(x).h,\, Df(x).k\rangle = \langle h,\, k\rangle\,.$$

1. Déterminer la différentielle de $g : x \mapsto \langle Df(x).h,\, Df(x).k\rangle$.
2. En déduire que $A(h, k, l) = \big\langle Df(x).h,\, D^2 f(x).(k, l)\big\rangle$ est antisymétrique par rapport aux deux premières variables et symétrique par rapport aux deux dernières.
3. Montrer alors que pour tout $h, k, l \in \mathbb{R}^n$, $A(h, k, l) = 0$.
4. Conclure que f est une application affine dont l'application linéaire associée est un automorphisme orthogonal.