MTH1610
Université de Bretagne-Sud,
Février 2015

Devoir Maison n°1
Calcul Différentiel et Suites de Fonctions
A rendre pour le mardi 17 Mars

Exercice 1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies. Montrer que toute application linéaire $f : E \to F$ est $\mathscr{C}^\infty$ et calculer ses différentielles $D^k f$, $k \geqslant 1$.

Exercice 2. Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & \frac{a-x}{\|x-a\|^2}. \end{array}$$

1. Montrer que $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = \|x-a\|^2$ est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ et calculer sa différentielle.
3. Montrer que
$$Df(x).h = \frac{S.h}{\|x-a\|^2}$$
où S est la symétrie orthogonale d'axe $x-a$.

Exercice 3. Pour $a < b$ deux réels et $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel, on considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[a,b]$ dans E, convergeant simplement vers une fonction f. On suppose que les fonctions f_n sont toutes lipschitziennes pour une même constante k,

$$\exists k > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], \qquad \|f_n(x) - f_n(y)\| \leqslant k\,|x-y|\,.$$

1. Montrer que la fonction f est k-lipschitzienne.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.
Indication : procéder par l'absurde.