

## L2 MTH1314 2014-2015

### Feuille 5. Groupe symétrique

**Exercice 1.** Pour  $n = 3$ , puis  $n = 4$ :

1. Ecrire toutes les permutations de  $\mathcal{S}_n$ .
2. Ecrire pour chacune la décomposition en produit de cycles à supports disjoints, et calculer la signature.

**Exercice 2.** On considère les deux éléments suivants de  $\mathcal{S}_{10}$ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 10 & 3 & 9 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 6 & 2 & 3 & 1 & 7 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune de ces deux permutations ( $s = \sigma$  puis  $\tau$ ):

1. Ecrire sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints, et calculer sa signature.
2. Calculer la composée  $(1, 2) \circ s$  et écrire sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Vérifier que  $\varepsilon((1, 2) \circ s) = -\varepsilon(s)$ .
3. Calculer la composée  $s \circ (1, 2)$  et écrire sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Vérifier que  $\varepsilon(s \circ (1, 2)) = -\varepsilon(s)$ .

**Exercice 3.**

1. Soient  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  deux cycles à supports disjoints de longueurs  $l_1$  et  $l_2$ . Donner alors l'ordre de  $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ .
2. Soit  $\tau$  l'élément de  $\mathcal{S}_{11}$ :  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 7 & 9 & 11 & 2 & 1 & 3 & 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ . Décomposer  $\tau$  en un produit de cycles à supports disjoints. Préciser l'ordre et la signature de  $\tau$ . Calculer  $\tau^2$ ,  $\tau^3$ ,  $\tau^{1000}$  et  $\tau^{-1}$  en produits de cycles à supports disjoints.

**Exercice 4.** Soit  $n \geq 3$  dans  $\mathbb{N}$  et  $\gamma$  un cycle de longueur  $r$  dans  $\mathcal{S}_n$  tel que  $\gamma = (j_1, j_2, \dots, j_r)$ .

1. Etant donné  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , démontrer que  $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$  est le  $r$ -cycle  $(\sigma(j_1), \sigma(j_2), \dots, \sigma(j_r))$ .
2. Montrer alors que pour tout couple  $1 \leq i < j \leq n$ , on a

$$(j-2, j-1) \dots (i+1, i+2)(i, i+1)(i, j)(i, i+1)(i+1, i+2) \dots (j-2, j-1) = (j-1, j).$$

En déduire que  $\{(i, i+1), 1 \leq i \leq n-1\}$  engendre  $\mathcal{S}_n$ .

3. On pose  $\gamma_1 = (1, 2, \dots, n)$  et  $\tau = (1, 2)$ , calculer  $\gamma_1^p \circ \tau \circ \gamma_1^{-p}$ . En déduire que les permutations  $\tau$  et  $\gamma_1$  engendent  $\mathcal{S}_n$ .

**Exercice 5.** Si  $c$  est un cycle de  $\mathcal{S}_n$  d'ordre  $l$  et  $k \leq l$  un entier naturel, calculer l'ordre de  $c^k$ .

**Exercice 6.**

1. Soit  $H = \{\sigma \in S_5, \sigma(1) = 1\}$ . Vérifier que  $H$  est un sous-groupe de  $S_5$  et trouver son ordre.
2. Soit  $K = \{\sigma \in S_5, \sigma(1) = 1 \text{ ou } \sigma(1) = 2\}$ . Montrer que  $K$  n'est pas un sous-groupe de  $S_5$ .
3.  $r$  et  $n$  étant des entiers tels que  $3 \leq r \leq n$ , on pose

$$F = \{\sigma \in S_n, \forall i \in \{1, \dots, r\}, \sigma(i) \in \{1, \dots, r\}\}.$$

Prouver que  $F$  est un sous-groupe de  $S_n$  et déterminer son ordre.