L2 MTH1314 2014-2015

Feuille 4. Fractions rationnelles

Exercice 1. Mettre sous forme réduite les fractions rationnelles suivantes:

$$F = \frac{X^3 + 4X^2 + X - 6}{X^4 - X^3 - 5X^2 - X - 6}, \quad G = \frac{X^4 + X^2 + 1}{X^3 + 3X^2 + 3X + 2}.$$

Exercice 2. Soient $F, G \in \mathbb{K}(X)$. Montrer que

$$\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G),$$

et que

$$\deg(F + G) \leq \max(\deg(F), \deg(G)),$$

avec égalité si $\deg(F) \neq \deg(G)$.

Exercice 3. Comparer les pôles et les zéros de $G = F(X + a)$ à ceux de F.

Exercice 4. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions suivantes:

$$F_1 = \frac{4}{(X^2 - 1)^2}, \quad F_2 = \frac{X^4 + 1}{(X + 1)^2(X^2 + 1)}, \quad F_3 = \frac{X^5 + 1}{X(X - 1)^2},$$

$$F_4 = \frac{1}{X^5 - 1}, \quad F_5 = \frac{X^2}{(X^2 + X + 1)^2}, \quad F_6 = \frac{X^5 + 1}{(X^3 - 1)(X^2 + X + 1)}.$$

Exercice 5. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions suivantes:

$$F_1 = \frac{X^5 + 1}{X^3 - 1}, \quad F_2 = \frac{X^2}{(X^2 - 1)(X^2 + 1)}, \quad F_3 = \frac{X^3 + 1}{(X - 1)(X^2 + 1)^3},$$

$$F_4 = \frac{X^4 + 3X^2 + 1}{X^5 + X}, \quad F_5 = \frac{X^7 + 2}{(X^2 + X + 1)^3}, \quad F_6 = \frac{1}{X^{2n} - 1}, \text{ où } n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 6.

1. Calculer la décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles f suivantes, puis calculer les dérivées d'ordre n de f:
   (a) $f(x) = \dfrac{1}{(x - a)(x - b)}$ (on distinguera le cas $a = b$ et le cas $a \neq b$).
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x \cos a + 1}$
   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x \cosh a + 1}$
2. Calculer les dérivées d'ordre n de la fonction $f(x) = \arctan x$.

Exercice 7. On considère la fraction

$$F = \frac{X+3}{(X-1)^4(X+1)}.$$

1. Donner l'expression de G définie par $G(T) = F(T+1)$.

2. Montrer que l'on peut décomposer le numérateur $D(T)$ de la fraction $G(T)$ de la façon suivante

$$D(T) = a(2+T) + TD_1(T)$$

où a est un réel et $D_1(T)$ un polynôme dans $\mathbb{R}[T]$. En déduire alors que

$$G(T) = \frac{2}{T^4} - \frac{2}{T^3(T+2)}.$$

3. Réitérer le processus pour obtenir la décomposition en éléments simples de $G(T)$ et en déduire celle de $F(X)$.

Exercice 8. On considère la fraction:

$$F(X) = \frac{1}{(X^3-1)^3}$$

1. Montrer que la fraction s'écrit:

$$F(X) = \frac{1}{(X-1)^3(X^2+X+1)^3} = \sum_{k=1}^{3} \frac{a_k}{(X-1)^k} + F_1(X),$$

où la fraction F_1 ne possède pas 1 pour pôle.

2. Multiplier cette égalité par $(X-1)^3$, dériver une fois, deux fois et en déduire la valeur des a_k.

3. Remarquer que $F(jX) = F(j^2X) = F(X)$ et terminer la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$.