L2 MTH1314 2014-2015

Feuille 2. Groupes, anneaux, corps

Exercice 1. On définit sur $\mathbb{R}$ la l.c.i. $*$ par $a * b = a + b - ab$.

1. $(\mathbb{R}, *)$ est-il un groupe ?
2. Déterminer un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui soit un groupe pour la loi $*$.

Exercice 2. Soient $(G_1, *)$ et (G_2, ∇) deux groupes. On munit l'ensemble $G_1 \times G_2$ de la loi: $(g_1, g_2) \otimes (h_1, h_2) = (g_1 * h_1, g_2 \nabla h_2)$. Montrer que $(G_1 \times G_2, \otimes)$ est un groupe. On parle de "structure produit canonique" pour $G_1 \times G_2$.

Exercice 3. Sur $\mathbb{R}$ on définit $*$ par $a * b = |a|\, b$. Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ n'est pas un groupe.

Exercice 4. Soit G un groupe, H une partie de G. Montrer que H est un sous-groupe de G si et seulement si: H est non vide et pour tous x, y éléments de H, xy^{-1} est encore élément de H.

Exercice 5. Soit G un groupe, G_1 et G_2 deux sous-groupes de G.

1. Montrer que $G_1 \cap G_2$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que $G_1 \cup G_2$ est un sous-groupe de G si et seulement si: $G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$.

Exercice 6. Soient a et b deux entiers relatifs. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{Z}$. En déduire que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, où d est le PGCD de a et b, et $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$, où m est le PPCM de a et b.

Exercice 7. Montrer que

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & (\mathbb{Z}, +) & \to & (2\mathbb{Z}, +) \\ & n & \longmapsto & 2n \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

Exercice 8. Montrer que l'anneau $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif.

Exercice 9. L'ensemble $2\mathbb{Z}$ muni des lois $+$ et $\times$ est-il un anneau ?

Exercice 10. On considère les applications suivantes, de $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ dans lui-même.

$$f_1 : x \mapsto x, \qquad f_2 : x \mapsto 1 - x, \qquad f_3 : x \mapsto \frac{1}{1-x},$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{1}{x}, \qquad f_5 : x \mapsto \frac{x}{x-1}, \qquad f_6 : x \mapsto \frac{x-1}{x}.$$

On munit l'ensemble $E = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ de la composition des applications.

1. Ecrire la table de composition de $(E, \circ)$.
2. Montrer que $(E, \circ)$ est un groupe.
3. Est-ce un groupe commutatif ?
4. Déterminer tous les sous-groupes de E.
5. Déterminer l'ordre de chacun des éléments de G.

Exercice 11. Trouver, à isomorphisme près, tous les groupes de cardinal égal à 4. Pour cela il suffit de construire les tables des groupes. Soit $G = \{e, a, b, c\}$ un groupe à 4 éléments, d'élément neutre e.

1. Montrer qu'il existe au moins un élément autre que e qui est son propre symétrique. Supposons par exemple que $b^{-1} = b$.
2. Montrer alors qu'on peut distinguer deux cas: soit $a^{-1} = c$ et $c^{-1} = a$, soit $a^{-1} = a$ et $c^{-1} = c$ et construire les deux tables correspondantes.
3. Montrer que la première table est celle du groupe $\mathbb{U}_4 = (\{1, i, -1, -i\}, \times)$, et aussi celle du sous-groupe G de $(\mathcal{S}_4, \circ)$ défini par
$$G = \left\{ \mathrm{Id}\,, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$
4. Montrer que la deuxième table est celle du sous-groupe H de $(\mathcal{S}_4, \circ)$ défini par
$$H = \left\{ \mathrm{Id}\,, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$
5. Vérifier que tous ces groupes sont commutatifs.

Exercice 12. Soit G un groupe noté multiplicativement et a un élément de G. On désigne par f_a l'application de G dans G définie par $f_a(x) = axa^{-1}$.

1. Montrer que f_a est un automorphisme de G, c'est-à-dire un isomorphisme de G dans lui-même. On l'appelle "automorphisme intérieur". On désigne par Aut G l'ensemble des automorphismes de G, et par Int G l'ensemble des automorphismes intérieurs de G.
2. Montrer que l'application $\begin{aligned} \varphi : G &\to \mathrm{Aut}\ G \\ a &\mapsto f_a \end{aligned}$ est un morphisme de groupes, dont on déterminera l'image et le noyau.
3. Que peut on en déduire pour (Int G, $\circ$) ?

Exercice 13. On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Montrer que l'application $x \mapsto x^3$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, *)$ vers $(\mathbb{R}, +)$. En déduire que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice 14. On considère G l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ muni de la l.c.i. $\circ$. Bien que $\circ$ soit associative et Id l'élément neutre, on va montrer que G n'est pas un groupe. Soit $f \in G$, définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$. Pour $p \in \mathbb{N}$ on pose également l'application $g_p \in G$:
$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad g_p(n) &= \frac{n}{2} \quad \text{si } n \text{ est pair,} \\ &= p \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \circ f = \mathrm{Id}$ mais que f ne possède pas d'inverse.

Exercice 15. Déterminer tous les morphismes de groupes surjectifs de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.