L2 MTH1314 2014-2015

Feuille 1. Logique et raisonnement

Exercice 1. On considère la phrase: "les mathématiciens sont tous des farceurs". Indiquer laquelle des cinq phrases suivantes en est la négation:

1. "les mathématiciens ne sont jamais des farceurs".
2. "les mathématiciens sont parfois des farceurs".
3. "il y a des mathématiciens qui ne sont pas des farceurs".
4. "les farceurs sont tous des mathématiciens".
5. "il y a des farceurs qui ne sont pas des mathématiciens".

Formaliser avec des quantificateurs chacune de ces assertions et écrire sa négation.

Exercice 2. Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des étudiants de l'UBS, $\mathscr{J}$ l'ensemble des jours de la semaine et pour un étudiant x, $h_j(x)$ son heure de réveil le jour j.

1. Ecrire avec des symboles mathématiques la proposition : "Tout étudiant de l'UBS se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h".
2. Ecrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques puis l'énoncer en français.

Exercice 3. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée	2. f est bornée	3. f est paire
4. $f$ne s'annule pas	5. f est périodique	6. f est croissante
7. f est strictement croissante	8. f n'est pas croissante	9. f n'est pas la fonction nulle
10. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$	11. f est inférieure à g	12. f n'est pas inférieure à g

Exercice 4. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner à chaque fois la négation.

1. $\exists x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x \leq -y^2$.
2. $\exists x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x \leq -y^2$.
3. $\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x \leq -y^2$.
4. $\forall x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x \leq -y^2$.

Exercice 5. Compléter, lorsque c'est possible, avec $\forall$ ou $\exists$ pour obtenir les énoncés vrais les plus forts.

1. $....x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
2. $....x \in \mathbb{R},\ x^2 + 3x + 2 = 0$
3. $....x \in \mathbb{N},\ x \leqslant \pi$
4. $....x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 3 = 0$

Exercice 6. Examiner les propositions suivantes. Lorsqu'elles sont vraies, en donner une démonstration ; sinon proposer un contre-exemple.

1. $\forall x \in [0,1],\ \forall y \in [0,1],\ x + y \in [0,1]$.
2. $\forall x \in [0,1],\ \exists y \in [0,1],\ x + y \in [0,1]$.

3. $\exists x \in [0,1],\ \forall y \in [0,1],\ x+y \in [0,1]$.

Exercice 7. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 3, il suffit qu'il soit strictement supérieur à 4.
2. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 3, il faut qu'il soit différent de 2.
3. Une condition suffisante pour qu'un réel soit supérieur ou égal à 2, est qu'il soit supérieur ou égal à 3.
4. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 2, il suffit que son carré soit strictement supérieur à 4.
5. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier naturel soit strictement supérieur à 1 est qu'il soit supérieur ou égal à 2.

Exercice 8. Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^2 = 4$ ...... $x = 2$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = \overline{z}$ ...... $z \in \mathbb{R}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x = \pi$ ...... $e^{2ix} = 1$.

Exercice 9. On considère un réel x et les deux propositions:
A: "pour tout réel $\varepsilon > 0$, $x \leq \varepsilon$" et B: "$x \leq 0$". Montrer que $A \Rightarrow B$.

Exercice 10. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et les deux propositions A: "f est une fonction paire et impaire" et B: "f est la fonction nulle". Montrer que $A \Leftrightarrow B$.

Exercice 11. Prouver que l'implication suivante est FAUSSE: "Si f est une application continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ et si $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ alors $f = 0$ sur $[-1,1]$". (il s'agit donc de trouver un contrexemple).

Exercice 12. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 13. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les deux propriétés suivantes :

$$P_n \ :\ 3 \text{ divise } 4^n - 1 \qquad \text{et} \qquad Q_n \ :\ 3 \text{ divise } 4^n + 1.$$

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$.
2. Montrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Que penser, alors, de l'assertion : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow Q_n)$?

Exercice 14. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \frac{2x_n^2-3}{x_n+2}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n > 3$.
2. Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 15. La suite de Fibonacci est définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

Exercice 16. Montrer par récurrence que $2^n > n^2$ pour tout $n > 4$.