L2 MTH1314 2014-2015

Devoir Maison n°2
A rendre pour le 13 Novembre

Exercice 1. On considère l'ensemble $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ des nombres réels de la forme $a + b\sqrt{2}$, où $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
2. Montrer que pour tout $x \in A$ il existe un unique couple $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = m + n\sqrt{2}$.
3. On considère l'application $\phi : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$
$$m + n\sqrt{2} \mapsto m - n\sqrt{2}$$
qui est bien définie grâce la question précédente. Montrer que ϕ est un automorphisme de l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ (c'est une bijection, et un morphisme pour chacune des deux lois).
4. Pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $N(x) = x\phi(x)$. Montrer que N est une application de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{Z}$, qui est un morphisme pour la multiplication.
5. En déduire que x est inversible si et seulement si $N(x) = \pm 1$.
6. Vérifier que $3 + 2\sqrt{2}$ et $-3 + 2\sqrt{2}$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Exercice 2. Soit E un ensemble fini et non vide. Soit $*$ une loi de composition interne pour E. On suppose les propriétés suivantes.

1. La loi $*$ est associative.
2. Pour tout $a \in E$ et tout $(x, y) \in E^2$, on a $a * x = a * y \Rightarrow x = y$.
3. Pour tout $a \in E$ et tout $(x, y) \in E^2$, on a $x * a = y * a \Rightarrow x = y$.

On considère pour tout $a \in E$ l'application γ_a définie par,

$$\gamma_a : \quad \begin{aligned} E &\to E \\ x &\mapsto a * x. \end{aligned}$$

1. Montrer que γ_a est bijective.
Indication : quand E est fini, une application de E dans E est bijective si et seulement si elle est injective si et seulement si elle est surjective, cf cours de F. Matheus.
2. Montrer qu'il existe e_1 dans E tel que $a = a * e_1$.
3. En déduire que $\forall b \in E$, $b = e_1 * b$.
4. Démontrer l'existence d'un élément neutre.
5. Conclure que $(E, *)$ est un groupe.