L2 MTH1314 2014-2015

Devoir Maison n°1
A rendre pour le 9 Octobre

Exercice 1. Examiner les propositions suivantes. Lorsqu'elles sont vraies, en donner une démonstration ; sinon proposer un contre-exemple.

1. $\forall x \in [0,1],\ \forall y \in [0,1],\ x+y \in [0,1]$.
2. $\forall x \in [0,1],\ \exists y \in [0,1],\ x+y \in [0,1]$.
3. $\exists x \in [0,1],\ \forall y \in [0,1],\ x+y \in [0,1]$.

Exercice 2. Trouver, à isomorphisme près, tous les groupes de cardinal égal à 4. Pour cela il suffit de construire les tables des groupes. Soit $G = \{e, a, b, c\}$ un groupe à 4 éléments, d'élément neutre e.

1. Montrer qu'il existe au moins un élément autre que e qui est son propre symétrique. Supposons par exemple que $b^{-1} = b$.
2. Montrer alors qu'on peut distinguer deux cas: soit $a^{-1} = c$ et $c^{-1} = a$, soit $a^{-1} = a$ et $c^{-1} = c$ et construire les deux tables correspondantes.
3. Montrer que la première table est celle du groupe $\mathbb{U}_4 = (\{1, i, -1, -i\}, \times)$, et aussi celle du sous-groupe G de $(\mathcal{S}_4, \circ)$ défini par
$$G = \left\{ \mathrm{Id}\,, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$
4. Montrer que la deuxième table est celle du sous-groupe H de $(\mathcal{S}_4, \circ)$ défini par
$$H = \left\{ \mathrm{Id}\,, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$
5. Vérifier que tous ces groupes sont commutatifs.

Exercice 3. Soit G un groupe. On considère A et B deux sous-groupes de G et on pose
$$AB := \{x \in G,\ \text{tel qu'il existe } a \in A \text{ et } b \in B,\ \text{tel que } x = ab\}.$$
Montrer que AB est un sous-groupe de G si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 4. Soit E un ensemble fini et non vide. Soit $*$ une loi de composition interne pour E. On suppose les propriétés suivantes.

$C1$. La loi $*$ est associative.
$C2$. Pour tout $a \in E$ et tout $(x,y) \in E^2$, on a $a * x = a * y \Rightarrow x = y$.
$C2$. Pour tout $a \in E$ et tout $(x,y) \in E^2$, on a $x * a = y * a \Rightarrow x = y$.

On considère pour tout $a \in E$ l'application γ_a définie par,
$$\gamma_a : \quad \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto a * x. \end{array}$$

1. Montrer que γ_a est bijective.
   Indication : quand E est fini, une application de E dans E est bijective si et seulement si elle est injective si et seulement si elle est surjective, cf cours de F. Matheus.

2. Montrer qu'il existe e_1 dans E tel que $a = a * e_1$.

3. En déduire que $\forall b \in E$, $b = e_1 * b$.

4. Démontrer l'existence d'un élément neutre.

5. Conclure que $(E, *)$ est un groupe.